GENERALIZED DYNAMIC INPUT-OUTPUT PRINCIPLE

GENERALIZED DYNAMIC INPUT-OUTPUT PRINCIPLE

广义动态投入产出原理

冯光明　著

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

广义动态投入产出原理/冯光明著. —北京：中国经济出版社，2014.1

ISBN 978-7-5136-2907-2

Ⅰ. 广… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①投入产出模型—动态模型—研究 Ⅳ. ①F223

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 260065 号

责任编辑　涂　晟

责任审读　霍宏涛

责任印制　马小宾

封面设计　华子图文设计公司

出版发行　中国经济出版社

印 刷 者　北京科信印刷有限公司

经 销 者　各地新华书店

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　16.5

字　　数　370 千字

版　　次　2014 年 1 月第 1 版

印　　次　2014 年 1 月第 1 次

书　　号　ISBN 978-7-5136-2907-2/F·9927

定　　价　59.00 元

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037

本版图书如存在印装质量问题，请与本社发行中心联系调换(联系电话：010-68319116)

序

当你打开本书，看见那些数据和表格，你可能会觉得枯燥无味、兴趣索然；但是，当你理解了这些数据和表格时，你顿时会发现，呈现在面前的是一个前所未知的世界！正如一个名人所说：一张表，一个世界。

在经济学说史上，最先试图用一张表来诠释经济运行的人，无疑是重农学派的魁奈(F. Quesnay)。魁奈的《经济表》有“原表”、“略表”，即“经济表范式”。“原表”作于1758年。在《经济表》中，魁奈试图说明社会总资本的再生产和流通过程。

能够成功地运用一张表描述经济世界的人，是诺贝尔奖金获得者美籍俄罗斯经济学家瓦西里·列昂惕夫(W. Leontief)。1936年列昂惕夫发表了“美国经济制度中投入产出的数量关系”一文，标志着投入产出分析的诞生。1942—1944年，列昂惕夫指导并参与编制了美国1939年的投入产出表，并运用该表成功预测了战后钢铁工业生产和就业情况。其后，美国官方又先后编制了从1947年至1972年等众多年份的投入产出表。从20世纪50年代开始，投入产出分析先后传入西欧、日本、苏联和东欧，以及亚非拉许多发展中国家。

一张又一张的投入产出表，像经纬分明的数字地图，记录了世界各国在某一年份或者某一时段国民经济发展的脉络。但是，不同年份的投入产出表，只能孤立、静止地表述某个时点或者某个时段国民经济发展的状况，并不能揭示各个时点的投入产出表之间存在着何种内在与必然的联系。

1948年戴维·哈京斯(D. Hakins)提出了以微分方程组形式表述的投入产出动态模型。1953年列昂惕夫在哈京斯等人的研究基础上，系统地研究和提出了动态投入产出模型，把动态模型分为封闭式和开放式两种形式。1958年多夫曼(R. Dorfman)、萨缪尔逊(P. A. Samuelson)和索洛(R. M. Solow)结合线性规划对投入产出结构进行动态分析，并提出了所谓快车道定理。1970年列昂惕夫发表了著名的“动态逆矩阵”一文。但是，只要对投入产出的结构分析局限在自然时间序列的基础上，就难以达到理论预测与实际发生事件在时间步长及时点上不一致的难题，从而不具备预测未来事件所必要的必然再现性特征。

马赫认为，时间和空间的量度与物质运动有关。休谟认为，空间和广延不是别的，而是按一定次序分布的可见对象充满空间，而时间总是由能够变化的对象出现可觉察的变化而被发现。人的时间和空间观念来自于印象与观念的排列方式。休谟举例并认为，长

笛上演奏的五个音符给我们一个时间的印象,但时间的印象不是第六个印象加到其他五个之上的。因此,时空观念仅仅是由一定方式排列的、不同的具体知觉抽象出来的一般抽象观念。

对于马赫和休谟的哲学思想及其学术体系,经典作家已经作出了全面而深刻的评述。但是,马赫与休谟关于时间和空间观念的历史进步意义,是对牛顿绝对静止时空观的否定与批判。作为佐证的是,由于受到马赫与休谟关于时间和空间观念的启发,1905年爱因斯坦运用洛仑兹变换推出了光速不变和相对性原理,创立了狭义相对论。在相对论中,时间与空间构成了不可分割的四维时空,质量和能量是与运动状态相联系,动量和能量实现了统一。由此给人们的启发是:不存在绝对静止的参照物,时间的测量也是随参照系不同而各异。

本书采取的“生产功能结构分类法”,源于对人类历史上劳动资料发展演变的考证,是在比较研究人与生产工具之间功能分工历史演变中,抽象出具有共性特征并予以归纳的结果。因此,按照生产功能结构分类法进行部门分类,一开始就以超出自然时间步长的跨度,摆脱了固定不变的自然时间步长及其序列的束缚,进而使投入产出的动态结构分析,建立在人与生产工具及其相互之间生产功能所具有共性的律动或演变的基础上。关于这一点,务请读者格外注意,即使是形式看似相同的公式,在广义动态投入产出系统中可能会具有不同的含义。

众所周知,庞特尼雅金的最大化原理和贝尔曼的动态规划方法,是现代最优控制理论的基石。本书尝试运用庞特尼雅金最大化原理作为一阶条件,通过构造现值哈密顿函数,构造并求解对应的雅可比矩阵,求取以非齐次微分方程组特解与通解形式,所构成广义非线性动态投入产出模型的庞特尼雅金最大值解,并推广到多种类型并存的情形。由于属于首次尝试性的探索,其中难免会有不足以至谬误之处,恳请学术界的各位前辈与同行不吝赐教!

“秋水文章不染尘”,通常形容一种理论著作具有直达宇宙奥秘的穿透力。这是一代又一代不知疲倦的探索者们所向往和追求的目标,本人愧不能至,但心向往之。总之,本书虽是千虑之一得,但仍属管中窥豹,希望作为引玉之砖,以求取各位前辈与同行的指教!

冯光明

2013 年 11 月 30 日

目　录

第一章　投入产出理论的渊源与沿革

一、投入产出理论的由来

投入产出分析，又称部门联系平衡法，或称产业关联分析，最早由美籍俄罗斯经济学家瓦西里·列昂惕夫①(W. Leontief)提出。主要通过编制投入产出表及建立相应的数学模型来反映经济系统各个部门之间的联系。

列昂惕夫于1931年开始研究投入产出分析。他利用美国国情普查资料，编制了美国1919年和1929年的投入产出表，把国民经济划分为42个部门，分析美国的经济结构和经济均衡问题。1936年他在《经济与统计评论》第8期上发表“美国经济制度中投入产出的数量关系”一文，标志着投入产出分析的诞生。1941年他发表了《美国经济结构(1919—1929)》一书，比较系统地总结了他的研究成果，阐述了投入产出分析的基本原理及其发展。

投入产出分析的思想渊源，可追溯到法国重农学派魁奈(F. Quesnay)的《经济表》。在资产阶级古典经济学中，魁奈的《经济表》是第一次描述了社会总产品生产和流通的图解，或多或少对列昂惕夫的早期研究思想产生启发和影响。但是，使列昂惕夫提出投入产出分析的直接启发，则是里昂·瓦尔拉斯(Leon Walras)的“全面均衡论”。19世纪后半期，瑞士洛桑大学教授瓦尔拉斯运用联立方程体系表示各个经济变量之间的相互依存关系，用以说明无数市场上各种商品和各种生产要素劳务的供求及其价格在均衡点上的相互决定。这一理论中关于经济活动之间相互依存性的观点，构成列昂惕夫后来提出投入产出分析的理论基石。列昂惕夫将瓦尔拉斯烦琐的联立方程体系加以简化，从而提出了他的投入产出模型。因此，列昂惕夫曾多次申明，投入产出分析是“全部相互依存(general interdependent)这一古典理论的具体延伸”②。

投入产出分析产生于20世纪30年代。1929年资本主义世界经济危机的爆发。使关于资本主义市场经济能够自行调节、保持均衡发展的传统资产阶级经济学理论宣告破产。这一冲击在资产阶级经济学中产生了两种结果，一方面是凯恩斯主义的出现，主张国家干预经济，刺激投资和消费，扩大有效需求，以便减少失业和预防经济危机的发生，后来发展为资产阶级经济学的主流派。另一方面是在原来数理经济学的基础上，一些经济学家力图运用数学方法和统计资料，对资本主义经济数量关系进行分析、研究和预测，以便预测和防止经济危机的发生，形成了投入产出分析和经济计量学。

投入产出分析最早的实际应用是在20世纪40年代。1941年美国劳工部统计局开展关

---

① 列昂惕夫：美国著名的经济学家，1973年诺贝尔经济学奖金获得者，原藉俄国，1906年8月5日出生于俄国彼得堡，曾任美国哈佛大学经济学教授，纽约大学经济分析研究所所长等职。

② 瓦西里·列昂惕夫. 投入产出经济学(中译本)[M]. 北京：商务印书馆，1980：1.

于第二次世界大战结束后就业情况的研究，在列昂惕夫的指导下，于1942—1944年编制了美国1939年的投入产出表，并运用该表资料预测战后钢铁工业生产和就业情况。这次预测成功，使投入产出分析受到美国政府和经济学界的重视。随后，美国官方又先后编制了1947年、1958年、1961年、1963年、1966年、1972年等年份的投入产出表。从20世纪50年代开始，投入产出分析先后传入西欧、日本、前苏联和东欧，以及亚非拉的许多发展中国家。

二、思想渊源与理论发展

(一)投入产出分析的思想渊源

投入产出分析的思想渊源，可以追溯到法国重农学派魁奈的《经济表》。在《经济表》中，魁奈第一次描述了假想农业国中的生产阶级、非生产阶级和地主阶级之间，以农产品为中心的社会总产品生产和流通的图解，试图证实只有农业才是一切财富的源泉这一重农主义理论。正如列昂惕夫回顾他本人早年从事经济研究工作的情形时所说，重农学派的思想曾对投入产出分析的早期研究思想产生过启发作用。

众所周知，马克思在《资本论》中把社会生产划分为生产资料生产和消费资料生产的两大部类生产，把商品价值分为C＋V＋M，考察了社会总资本的再生产及其流通过程，阐明了两大部类之间和它们内部各部分之间价值补偿和实物补偿的内在联系，对简单再生产和扩大再生产的实现条件进行了公式化的表述。这些思想对列昂惕夫的早期研究思想或多或少产生过启发影响。

19世纪后半叶，瑞士洛桑大学教授瓦尔拉斯在《纯粹经济学纲要》中，提出了“全面均衡论”。他认为，国民经济是由居民和企业所组成的，居民将自己所拥有的劳动力和资本提供给企业，从而从企业取得所需的消费品；企业从居民购买劳动力和借贷资本，从生产原材料的企业购买原材料而进行生产活动，并将其产品提供给居民。这样，通过各种市场，消费品、劳动力、资本和原材料等生产要素在居民和各企业之间实现循环。瓦尔拉斯从市场上各种商品的供给、需求和价格是相互影响、相互依存的前提出发，运用联立方程体系表示各种变量之间的相互依存关系，以便解释市场上各种商品、劳务、资本和其他生产要素的供求及其价格在均衡点上相互决定的原因。但是，对于拥有众多人口的国家或世界来说，这种理论上几乎包罗无遗的联立方程数目则接近于无限，使其应用于实际问题的解答则成为不可能。

1931年列昂惕夫开始分析美国的经济结构和经济均衡问题，将瓦尔拉斯的全面均衡体系改造为切实可行的体系而进行简化，把联立方程数目减少到可计量的程度，由此产生了投入产出分析。首先，用生产要素之间相互不可替代和具有固定系数的生产函数，取代了生产要素之间可替代的生产函数，从而使国民经济变为可用线性联立方程体系表示的简化形式。其次，采用了简化的假定，即用某一年度的观察值来确定联立方程式中的参数。通过这样的假定，列昂惕夫排除了价格对各个经济主体优化行为的影响，使瓦尔拉斯极其烦琐的联立方程体系得以简化，使全面均衡体系成功地实现了计量化，从而使投入产出分析作为极其特殊的全面均衡理论而诞生了。

(二)投入产出的理论发展

最初的投入产出模型较为简单，主要包括棋盘式的投入产出表和线性方程式体系两个部分。投入产出模型包括一个中间产品的流量矩阵，右边连结一个最终需求向量，垂直方向连结一个原始投入或增加价值的向量。如果已经给出最终需求向量，则可利用列昂惕夫逆矩阵$(I-A)^{-1}$，将最终需求转换成产出总量；其劳动投入也可利用此矩阵，求出单位产品总成本即价格。

20世纪40年代末和50年代初，戴维·哈京斯(D. Hakins)、乔治斯库·罗金(N. Georgescu Roegen)、霍利(J. Holley)和瓦西里·列昂惕夫先后提出了动态投入产出模型。1948年戴维·哈京斯提出了以微分方程组形式表述的投入产出动态模型。1953年列昂惕夫在哈京斯等人的研究基础上，系统地研究和提出了动态投入产出模型，把动态模型分为封闭式和开放式两种形式。动态模型的构成，是在静态模型的基础上增加一列产量变化向量乘上资本系数矩阵，将投资和积累作为下期对本期生产增量的函数，从而作为模型的内生变量由模型本身的求解而导出，因此，动态模型实际上分析了在某一时段上经济系统各部门间投入产出的数量依存关系。

1958年多夫曼(R. Dorfman)、萨缪尔逊(P. A. Samuelson)和索洛(R. M. Solow)结合线性规划对投入产出结构进行动态分析，并提出了所谓快车道定理。1970年列昂惕夫发表了著名的“动态逆矩阵”一文，为解决动态投入产出模型中生产和投资的直接消耗系数求逆问题，作出了有力的推进。

20世纪70年代以来，众多学者从各自的研究领域，运用各种分析方法和手段，如计量经济学、控制论和运筹学等，提出了各种动态投入产出模型。但是，目前，动态模型基本上处于理论探索阶段，一些动态模型至今无法或尚未用经验的统计资料进行计量，其实际应用尚有待于进一步的发展和完善。

思考题

为什么说列昂惕夫的投入产出分析是一种特殊的全面均衡理论？

第二章　静态投入产出模型

现代国民经济中的任何一个部门，只要从事生产活动，就必须在生产过程中使用从其他部门购进的原材料、半成品以及由居民和其他部门（或国外）提供的生产要素（劳动、资产设备和进口原材料等），并将其生产的产品或劳务作为最终产品提供给最终消费者，或者作为中间产品提供给其他部门，这样，各部门之间就存在着一定的数量依存关系。投入产出表，就是全面反映一定时期内国民经济中各种投入物来源以及各部门产品去向的一种表格，是国民经济产品循环的一种会计记录。编制投入产出表可根据研究目的而采取不同的方法。

按照时间概念，可以分为静态投入产出模型和动态投入产出模型。

静态投入产出模型主要研究某一个时点或者时段各个产业部门之间的相互联系问题；按照不同的计量单位，可以分为实物型和价值型两种。

一、实物形态投入产出模型

静态产品投入产出模型是投入产出分析的基本形式，因此，要掌握投入产出原理，必须首先了解静态产品投入产出表。

(一)静态产品投入产出表

在实物投入产出表中，是以产品来进行分类的，其计量单位则是以实物单位来计量的。简化的实物形态投入产出表如表 2－1 所示：

表 2－1　简化的实物形态投入产出表

投入产出	中间产品 1　2　…　n	最终产品	总计
物　1 质　2 消　⋮ 耗　n	q_{11}　q_{12}　…　q_{1n} q_{21}　q_{22}　…　q_{2n} ⋮　⋮　⋮ q_{n1}　q_{n2}　…　q_{0n}	y_1 y_2 ⋮ y_n	Q_1 Q_2 ⋮ Q_n
劳动	q_{n1}　q_{n2}　…　q_{on}	—	—

对投入产出表的解释是，从列的方向看，反映了各类产品生产中要消耗其他产品（包括消耗本部门自产产品）的数量。但是，由于列向各类产品的计量单位不一致，故不能进行运算。因此，实物投入产出模型只有行模型，而没有列模型。从行的方向看，反映各类产品的

分配使用情况，其中一部分作为中间产品供其他部门生产中使用消耗，另一部分则作为最终产品供投资和消费使用，两部分相加就是一定时期内各类产品的生产总量。

在表 2-1 中，如果用 i 表示投入产出表的行，用 j 表示投入产出表的列。表中 q_{ij} 表示第 i 种产品对第 j 种产品的中间投入量，并包含第 i 种产品对本部门内部的投入量；或是第 j 种产品在生产过程中对第 i 种产品的直接消耗量，并包含 j 产品对本部门内部的消耗量。

由此汇合，其一，第 i 种产品对各种产品的投入之和，等于第 i 种产品的中间产品合计。其二，第 i 种产品提供的各项最终产品之和，等于其最终产品合计。其三，第 i 种产品的中间产品合计与最终产品合计的代数和等于其总产品，即：

中间产品＋最终产品＝总产品

这里所说的中间产品，是指一定时期内在生产过程中生产性消耗各种列名的实物产品，即作为劳动对象的部分。最终产品是指一定时期内不需要在本国作进一步加工的产品，包括全部消费品与作为劳动资料的产品。具体地说，是用于个人与社会消费的产品、用于固定资产积累与流动资产积累的产品、用于固定资产更新的产品，以及用于出口的产品。

按照投入产出表的每一行可以建立一个方程，用符号表示就有：

$$
\begin{gathered}
q_{11}+q_{12}+\cdots+q_{1n}+y_1=Q_1 \\
q_{21}+q_{22}+\cdots+q_{2n}+y_2=Q_2 \\
\cdots\cdots \\
q_{n1}+q_{n2}+\cdots+q_{nn}+y_n=Q_n
\end{gathered} \tag{2-1}
$$

亦可将上述方程式写成：

$$
\sum_{j=1}^{n} q_{ij}+y_i=Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2-2}
$$

这样就建立起由线性方程组构成的数学模型，就是投入产出数学模型。

（二）直接消耗系数

所谓直接消耗系数，其定义为：每生产单位 j 产品需要消耗 i 产品的数量。直接消耗系数通常称为投入系数或技术系数，一般用 a_{ij} 表示。因此，某一产品的直接消耗系数可由该种产品的总产量去除直接消耗各个产品的数量进行计算。

直接消耗系数的计算公式是：

$$
a_{ij}=\frac{q_{ij}}{Q_i} \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2-3}
$$

直接消耗系数是静态产品投入产出模型的核心概念，不仅记录了国民经济各部门间不断流动的产品与劳务的轨迹，而且反映了各部门间产品的直接数量依存关系。但是，列昂惕夫在全部均衡模型计量化中，大胆地忽略了反映各部门各自投入产出关系大相径庭的生产函数，采取简明的方法假定产品和劳动在产品部门间的流量 q_{ij} 与产出量 Q_j 之间存在着线性关系，并在生产技术不变的情况下，这一系数固定不变，从而使这一定义具有其与生俱来的局限性。

(三)直接消耗系数矩阵

对于表(2－1)中的 n 种产品，对应有 $n\times n$ 个直接消耗系数，将其按下标顺序排列成矩阵，称为直接消耗系数矩阵，记为 A。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2－4}$$

由直接消耗系数的定义可知，直接消耗系数矩阵中的元素必须是非负的。

(四)引入直接消耗系数矩阵的实物型投入产出模型

把$q_{ij}=a_{ij}Q_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$代入方程式(2－2)，得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Q_j+y_i=Q_i\quad(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2－5}$$

上式如果写成矩阵形式则有：

$$AQ+Y=Q \tag{2－6}$$

式中：A 为直接消耗系数矩阵；

$Q=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)^T$——总产品列向量；

$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$——最终产品列向量

其中，上标“T”为矩阵转置符号。

为了能够更为准确而直观地理解投入产出分析，其后将结合投入产出表、投入产出系数表、逆矩阵和均衡产出解的二维图形等，简明而确切地阐述投入产出模型的主要内容。下面先举一个简单的例子。

假设社会经济由农业、工业作为两个内生的部门与消费最终产品的居民消费部门所构成。在此，农业部门仅生产大米，工业部门仅生产纺织品。居民消费部门为两个生产部门提供劳动。表 2－2 就是体现这一经济在一定时期内实物形态的投入产出表，为了计算方便，表中模拟了较为简单的假设数字。即农业部门共生产大米 200 万吨，其中，作为中间产品提供给本部门内部消耗 60 万吨，工业部门 50 万吨，作为最终产品供应给居民部门消费 90 万吨；同样，工业部门纺织布匹 100 万平方米，其中，作为中间产品提供农业部门 24 万平方米，工业部门内部消耗 16 万平方米，销售给居民消费部门 60 万平方米。另外，居民部门为农业、工业部门提供的劳动量分别是 120(千人・天)和 80(千人・天)，全部社会经济需要投入 200(千人・天)的劳动。

表 2－2　投入产出表(实物单位)

	农业	工业	居民消费	总生产量
农业	60	50	90	200(万吨)
工业	24	16	60	100(万 m^2)
劳动	120	80	0	200(千人天)

以表 2－2 为内容，按照(2－3)式计算出投入系数表(见表 2－3)，具体计算如下：农业部门每生产大米 1 万吨，部门内部需要消耗大米 60/200＝0.30 万吨，需要投入布匹 24/200＝0.12 万 m^2，需投入劳动 120/200＝0.60(千人・天)；工业部门纺织布匹每 1 万 m^2，需要消费大米 50/100＝0.50 万吨，部门内部消耗布匹 16/100＝0.16 万 m^2，80/100＝0.8(千人・天)。

表 2－3　投入系数表

	农业	工业
农业	0.30	0.50
工业	0.12	0.16
劳动	0.60	0.80

现将(2－6)式合并同类项，经整理可得

$$(I-A)Q=y \tag{2-7}$$

式中，I 是单位矩阵，并与 A 阵同阶。其中

$$(I-A)=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{m} \end{pmatrix}$$

在矩阵($I-A$)中，从列来看，说明了单位实物产品投入与产出的关系。如用“负”号表示投入，用“正”号表示产出，则矩阵中每一列的含义说明，为生产一个单位各种产品，需要消耗(投入)其它产品(包括自身)的数量。由于 $a_n<1$，则 $1-a_n>0$，所以主对角线上的元素均是正数，表示各种产品扣除自身消耗后的净产出。而主对角线以外的元素为负或零，表示单位产品的投入。同时，此矩阵的“行”则没有经济含义，因为每一行的元素不能运算。

显而易见，式(2－7)建立了总产品与最终产品之间的联系。也就是说，已知各种产品的总产量，则通过(2－7)式就可计算出一定生产技术结构下，各种产品用于最终产品的数量。

当然，如果矩阵($I-A$)存在逆矩阵$(I-A)^{-1}$，还可以建立最终产品与总产品之间的联系，即将(2－7)改写成：

$$Q=(I-A)^{-1}Y \tag{2-8}$$

这样，人们对各种产品的最终使用提出需求数量，即在已知 Y 的情形下可以通过式(2－8)求解 Q。

(五)完全消耗系数

在生产过程中，任何产品除了各种直接消耗关系外，还有各种间接消耗关系。完全消耗系数是包括所有直接消耗和间接消耗的全面描述。所谓完全消耗系数，是指每生产单位 j 种(部门)最终产品需要直接与间接消耗 i 种(部门)产品的数量。一般用 b_{ij} 来表示，用 B 来表示完全消耗系数矩阵。

在直接消耗系数矩阵 A 为已知的条件下，假设各部门都生产一个单位的产品，需要直接消耗各部门的产品为 $X^{(0)}=AI$，其中 I 为单位矩阵，表示各部门均生产一个单位产品。计算一次间接消耗时，应为 $X^{(1)}=AX^{(0)}=A^2I$。二次间接消耗为 $X^{(2)}=AX^{(1)}=A^3I$。计算 $(k-1)$ 次的间接消耗为 $X^{(k-1)}=A^kI$。当 $k\to\infty$ 时，完全消耗系数矩阵为

$$B=A+A^2+A^3+\cdots+A^k \tag{2-9}$$

(2-9)式中，当直接消耗系数 a_{ij} 具有 $\sum a_{ij}$ 的性质时，A 总有一种范数小于 1，根据矩阵范数的性质，可知 $A^k\to 0$。则(2-9)式可变为：

$$B+I=I+A+A^2+A^3+\cdots+A^k=(I-A)^{-1} \tag{2-10}$$

在此，矩阵幂级数 $I+A+A^2+A^3+\cdots+A^{k-1}$ 就相当于列昂惕夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$。可证明如下：

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I-A^k$$

当 $k\to\infty$ 时，$A\to 0$，而

$$I-A^k\to I$$

$\because\quad (I-A)\cdot(I-A)^{-1}=I$

$\therefore\quad (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})\to(I-A)^{-1}$

当 $k\to\infty$，$\lim A^k=0$ 时，上述级数收敛，故有

当 $k\to\infty$，$\lim(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})\to(I-A)^{-1}$

将(2-10)式整理后，得

$$B=(I-A)^{-1}-I \tag{2-11}$$

(2-11)上式表明，增加一个单位 j 部门最终产品，所需要完全消耗 i 部门产品的数量。并且在完全消耗系数矩阵与逆系数矩阵之间仅相差一个单位矩阵。

整理(2-11)式，有

$$\begin{aligned}(B+I)&=(I-A)^{-1}\\(B+I)(I-A)&=I\\B(I-A)+(I-A)&=I\\B&=A+BA\end{aligned} \tag{2-12}$$

这就是完全消耗系数的计算公式

实物型投入产出模型，建立了各类产品的生产和分配使用之间的静态平衡关系。在模型中，直接消耗系数矩阵 A 反映了生产过程的技术结构。模型通过列昂捷夫矩阵 $(I-A)$ 建立了总产品与最终产品之间的关系，通过列昂捷夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$ 建立了最终产品与总产品之间的关系。

二、价值形态投入产出模型

价值形态投入产出表，是根据国民经济各部门本期生产活动的产品与服务的分配去向和消耗来源，排列而成的一张棋盘式平衡表。

在价值投入产出表中，将国民经济分成若干部门，是以货币为计量单位的。价值投入产出表行的方向，是反映各部门产品的实物运动过程；而列的方向则反映各部门产品的价值形成过程。简化价值投入产出表形式如表 2-4 所示：

表 2－4　简化价值投入产出表

分配去向 / 投入来源		中间产品 部门 1	部门 2	…	部门 n	最终产品 y_i	总产品 X_i
物	部门 1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	X_1
质	部门 2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	X_2
消	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
耗	部门 n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	X_n
净产值	劳动报酬 v_i	v_1	v_2	…	v_n		
	纯收入 m_i	m_1	m_2	…	m_2		
总产值		X_1	X_2	…	X_n		

(一)按列建立的价值模型

按列的方向建立模型，是依据表 2－4 中竖表而建立的，描述各部门生产中的各种消耗、净产值与总产值之间的平衡关系。根据(2－4)表的列基本平衡关系式，有

物资消耗＋净产值＝总产值，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + N_j = X_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{2-13}$$

式中 N_j 为 j 部门净产值(新创造价值)。

引入直接消耗系数于上式，则得

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j + N_j = X_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{2-14}$$

式中 $\sum a_{ij}$ 表示生产单位 j 部门产品的物资消耗系数。

(二)按行建立的价值模型

从行的方向建立价值模型的过程，亦是反映各部门产品生产和分配使用的情况，建立最终产品与总产品之间的平衡关系。具体过程如下：中间产品＋最终产品＝总产品。即

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + Y_1 &= X_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + Y_2 &= X_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + Y_n &= X_n \end{aligned} \tag{2-15}$$

将以价值形式表示的各部门直接消耗系数 a_{ij} 代入上式，则得

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + Y_1 = X_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + Y_2 = X_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + Y_n = X_n$$

用数学符号代替价值形态的投入产出表中的具体数字，就可以建立一个产品投入产出数学模型，也称静态投入产出模型，其矩阵形式为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + y_i = X_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2-16}$$

如果已知最终需求向量或最终产品 y，以及直接消耗系数 a_{ij}，各部门的总产量可由列昂惕夫逆矩阵解出如下：

$$x = (I - A)^{-1} y \tag{2-17}$$

证明：现用迭代法求解，将代入(2-16)式，并将运算结果逐次迭代，可得到：

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} + y$$
$$x^{(2)} = Ax^{(1)} + y = A(Ax^{(0)} + y) + y$$
$$= A^2x^{(0)} + (I + A)y$$
$$x^{(3)} = Ax^{(2)} + y = A[A^2x^{(0)} + (I + A)y] + y$$
$$= A^3x^{(0)} + (I + A + A^2)y$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{(k)} = A^kx^{(0)} + (I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})y$$

由于每个直接消耗系数 a_{ij} 的值小于 1，所以 $A^k \to 0$，则

$$x^{(k)} = (I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})y$$

趋向于方程式(2-16)的解，而矩阵幂级数

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

就相当于列昂惕夫逆矩阵$(I - A)^{-1}$。可证明如下：

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I - A^k$$

当 $k \to \infty$时，$A \to 0$ ，而

$$I - A^k \to I$$
$$\because \quad (I - A) \cdot (I - A)^{-1} = I$$
$$\therefore \quad (I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \to (I - A)^{-1}$$

当 $k \to \infty$，$\lim A^k = 0$ 时，上述级数收敛，故有

当 $k \to \infty$，$\lim(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \to (I - A)^{-1}$（证毕）

在以后的讨论中，将要看到消耗系数矩阵必须满足若干条件时，上式才有符合实际意义的解。

(三)静态投入产出模型的求解条件

在静态投入产出模型的求解过程中，必须具备若干条件，才能得出合理的、有意义的求解。

(1)在不考虑进出口的条件下,各部门的最终产品与总产品都不能出现负值。如果若干部门出现负值,则表示这些部门或是没有产品产出,或是不能生产出满足需求的产品,反而需要动用过去的库存去弥补。在这种情况下,进行生产就成为没有社会意义和经济价值的事情。

(2)用价值量表示的直接消耗系数必须是非负,其取值范围应大于或等于 0,且小于 1,即 $0 \leqslant a_{ij} < 1$。如果消耗系数是负数,表示生产过程中不仅没有消耗,反而还有给予,这在实际上是不可能的。如果消耗系数大于 1,则表示生产过程中的物质耗费超过其生产成果,这种生产在经济上是没有意义的。

(3)各部门的直接消耗系数之和应小于 1,即 $\sum a_{ij} < 1$。由于 $\sum a_{ij}$ 的实物构成是 j 部门劳动对象的消耗系数 a_j,它应与折旧消耗系数和活劳动消耗系数之和为 1。在不考虑折旧的情况下,它应与活劳动消耗系数之和等于 1。如果 $\sum a_{ij} \geqslant 1$,则生产过程的物质耗费等于或大于其产出,这种生产是无法维持而没有经济意义的。

(4)霍金斯·西蒙(Hawkins Simon)条件

霍金斯·西蒙条件表述了消耗系数阵在满足什么条件下,对静态投入产出模型来说,当给定正的最终需求 $y>0$ 时,经过列昂惕夫逆矩阵求解后得到正的总产品。根据霍金斯－西蒙条件,在最终需求 $y>0$ 时,直接消耗系数大于零,且$(I-a_{ij})>0$,要使投入产出模型能够求解出有意义的解,行列式$|I-A|$必须大于零。

为了使最终需求满足非负的要求,由非负系数 A 组成的投入产出模型必须满足哪些条件?假设现有两个部门仅生产两种产品所构成的模型如下:

$$(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1 \tag{2-18}$$

$$-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = y_2 \tag{2-19}$$

现用简明的几何图形(见图 2－1)来解析上述方程组的求解条件。

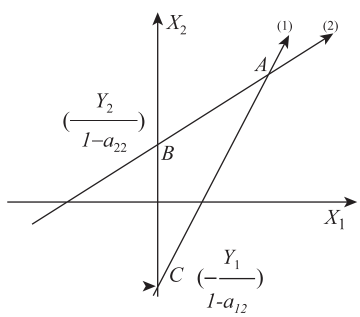

图 2－1　霍金斯·西蒙条件

设以横轴表示第 1 种产品部门的产出量,纵轴表示第 2 种产品部门的产出量。图 2－1 中的直线(1)表示(2－18)式,直线(2)表示(2－19)式。

在图 2－1 中,具体地说,作为直线(1),若 Y_1 不等于零时,且最终需求 $Y_1 \geq 0$,系数 $a_{12}>0$ 的情况下,则交于纵轴 C 点的截距应为$-Y_1/a_{12}$。同时,在系数 $a_{12}>0$ 的情况下,只要第 1 种产品部门能够向其他部门提供产品,则直线(1)的斜率$(1-a_{11})/a_{12}$就应大于零。同样,直

线(2)交于纵轴 B 点的截距为 $Y_2/(1-a_{22})\geqslant 0$，其斜率为 $a_{21}/(1-a_{22})$，亦应大于零。

如图 2-1 所示，唯有两条直线在第 I 象限内相交，(2-18)和(2-19)联立方程式才具有正值解的条件，才能得到具有实际经济意义的解。因此，直线(1)的斜率须大于直线(2)的斜率。用代数式表示，就必须满足：

$$\frac{(1-a_{11})}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{(1-a_{22})} \tag{2-20}$$

或

$$(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$$

以上表明，在最终需求为正数，在 $a_{ij}>0$，$(1-a_{ij})>0$ 的情况下，为了使投入产出模型可以求解，就应满足条件：

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = (1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0 \tag{2-21}$$

上述条件的经济解释是，为了得到非负的最终需求，各产品部门净产出量必须为正数；同时，产品部门为生产一个单位的产出量，所直接和间接投入本部门产品的总量必须小于 1。这就是所谓的霍金斯·西蒙条件。

就现实而言，国民经济的部门数量远大于两个部门，若假设有 n 个部门，则霍金斯·西蒙条件可表述为 n 阶行列式的情形，行列式 $|I-A|$ 各阶主子式都须大于零。可见，对于达到非负的最终需求而言，霍金斯·西蒙条件是列昂惕夫的静态投入产出模型具有正值解的充分必要条件。

(5)索罗(Solow)条件

现仍然以前述(2-18)式和(2-19)式为实物型两种产品的投入产出模型为基础，其相应价值型两种产品的投入产出模型为

$$\begin{aligned}(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2&=y_1\\ -a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2&=y_2\end{aligned} \tag{2-22}$$

假设抽象了固定资产折旧，没有产品替代和不存在联合生产的情况下，且两个产品部门都仅仅生产一个单位的总产品，则有

$$\begin{aligned}(1-a_{11})-a_{12}&=y_1\\ -a_{21}+(1-a_{22})&=y_2\end{aligned} \tag{2-23}$$

上述(2-23)式可以用二维图形(见图 2-2)表述如下：

在图 2-2 中，横轴 y_1 与纵轴 y_2 分别表示第 1 种产品部门与第 2 种产品部门的最终需求金额。A 点的坐标是$(1-a_{11},-a_{21})$，B 点的坐标是$(-a_{12},1-a_{22})$，分别表示两个产品部门进行一个单位生产的金额。

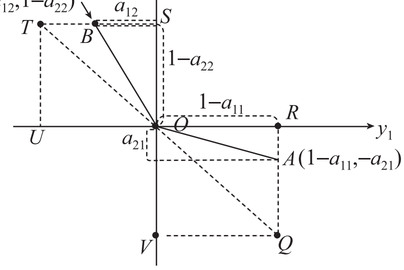

图 2-2　索罗条件

①要达到方程具有正值解的目标，就必须让以 OA 与 OB 为两条边，所形成平行四边形对角线的顶点落入第一象限范围内。这就要求 $RA<RQ$ 与 $SB<ST$。即$(1-a_{11})>a_{21}$与$(1-a_{22})>a_{12}$，或写成$(1-a_{11})-a_{21}>0$与$(1-a_{22})-a_{12}>0$。亦即

$$\begin{cases} 1 > \sum_{i=1}^{2} a_{i1} > 0 \\ 1 > \sum_{i=1}^{2} a_{i2} > 0 \end{cases} \tag{2-24}$$

索罗条件表明，在 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ 小于 1，且大于 0 的条件下，方程具有正值解。

②在 RA、SB 之中，只要其中一个小于 RQ 或 ST，则以 OA 和 OB 为两边所形成平行四边形的对角线就可包含正的象限，从而使方程得到对应的正值解。

③如果 $OR=OV$ 时，A 点与 Q 点就会重合；同样，若 $OS=OU$ 时，B 点与 T 点也会重合。这样，AOB 就会分别与 QOT 重合，A、B 两点就会坐落在斜率为 -1 的直线 QT 之上，这就无法形成平行四边形，显示方程无解。

④当 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 1$ 时，方程出现负值解。这种生产没有任何现实的经济意义。

（四）逆矩阵

1. 列昂惕夫逆矩阵与逆矩阵系数表

如果将（2－16）式按照内生变量与外生变量分别整理，可得

$$\begin{gathered} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = Y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = Y_2 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n = Y_n \end{gathered} \tag{2-25}$$

为了简化便于叙述，可将（2－16）式所示开放式列昂惕夫投入产出模型，由生产两个单位产品和一种最终需求的部门来组成，可表述如下

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

或简写成

$$[I-A]X = Y \tag{2-27}$$

或表述为

$$\begin{gathered} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = Y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = Y_2 \end{gathered} \tag{2-28}$$

$[I-A]$矩阵就是所谓的列昂惕夫矩阵，其各列称为投入产出活动向量，反映了各个产品部门生产一个单位总产品时的投入量和净产出量。如果已有系数矩阵 A，就能够算出 $I-A$ 矩阵，因此，只要给出最终需求表 Y，就能用上式求出 X。

求解上面的二元一次联立方程，学过初中代数的人，都能用消元法顺利地求解。但随着联立方程未知数的增加，且不说用人工笔算，即使是用计算机求解，计算时间都会大幅增加。在实际工作中，虽然各国编制的投入产出表部门个数不尽相同，但部门分类的个数至少都在十二个以上，如果每次都根据最终需求表，然后用消元法去逐一求解，那是很烦琐费力且低效的。

简单易行的方法，是利用列昂惕夫逆矩阵将最终需求表 Y 向量变换为均衡产出量 X 向量。由(2－17)式，我们已经了解，如果已知最终需求向量或最终产品 y，以及直接消耗系数 a_{ij}，各部门的总产量可由列昂惕夫逆矩阵解出如下：

$$x=(I-A)^{-1}y$$

为了使矩阵 $I-A$ 存在逆矩阵，需要具备一个必要条件：矩阵 $I-A$ 的各列必须与线性无关。在此，我们假定 $(I-A)^{-1}$ 矩阵存在。

由(2－17)式可知，决定各部门均衡产出量 X 的因素是最终需求 Y 与列昂惕夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$，并且均衡产出的数量或产值等于最终需求 Y 与列昂惕夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$ 各行的内积。这是因为，显然(2－28)式等式左边的系数矩阵就是 $(I-A)$ 矩阵。如果用符号 c_{ij} 表示(2－17)式，可由下式给出：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11}y_1 & c_{12}y_2 \\ c_{21}y_1 & c_{22}y_2 \end{bmatrix} \tag{2－29}$$

其中

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Delta=(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}$$

在投入产出分析中，$(I-A)^{-1}$ 被称为列昂惕夫逆矩阵。通过 $(I-A)^{-1}$，可直接求出均衡产出量，是列昂惕夫逆矩阵的显著特征。(2－29)式表明，第一部门的均衡产出量等于 $(I-A)^{-1}$ 第一行向量与最终需求向量的内积；第二部门的均衡产出量等于 $(I-A)^{-1}$ 第二行向量与最终需求向量的内积。这样，如果由计划或预测给出了最终需求表，只要计算出列昂惕夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$，就可以利用列昂惕夫逆矩阵各行向量与最终需求向量的内积，方便地算出各部门的均衡产出量。

在此，还是运用表(2－2)投入产出表为例，来具体计算列昂惕夫逆矩阵。由于表(2－3)是与表(2－2)对应的投入系数矩阵，因此，可利用表(2－3)的数据求解列昂惕夫逆矩阵如下：

$$[I-A]^{-1}=\begin{bmatrix} 0.70 & -0.50 \\ -0.12 & 0.84 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{0.528}\begin{bmatrix} 0.84 & 0.50 \\ 0.12 & 0.70 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.59 & 0.95 \\ 0.23 & 1.33 \end{bmatrix}$$

计算结果表明，如果居民消费部门要求工业部门提供布匹每 1 万 m^2，工业部门就必须纺织布匹 1.33 万 m^2，才能满足社会的直接需求和间接需求；同时，并未产生最终需求的农业部门，也需要生产 0.95 万吨大米来满足间接需求，才能使社会供需保持均衡。同理，如果居民消费部门要求农业部门提供大米 1 万吨，农业部门就必须生产 1.59 万吨大米，其中的 0.59 万吨大米是由社会经济相互联系而派生的间接需求；同时，并未发生最终需求的工业部门，亦需要纺织布匹 0.23 万 m^2 满足相应的间接需求，否则，社会经济就会出现供需失衡。

由此，如果计划部门给出最终需求表 Y，由(2－29)式可计算出最终需求表 Y 与列昂惕夫逆矩阵各行的内积，各部门的产出量可通过下式计算得出：

$$x_1=1.59Y_1+0.95Y_2$$

$$x_2=0.23Y_1+1.33Y_2$$

2. 列昂惕夫逆矩阵与正值条件的均衡解

由上一节(2－29)式，我们已经熟知(2－28)式投入产出模型的求解可显示如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}y_1+\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}y_2 \tag{2-30}$$

式中：$c_{11}=(1-a_{22})/\Delta$；

$c_{21}=a_{21}/\Delta$；

$c_{12}=a_{12}/\Delta$；

$c_{22}=(1-a_{11})/\Delta$；

$\Delta=(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}$

在这里，c_{ij} 被称之为列昂惕夫逆矩阵的元素。(2-30)式说明，

$$\begin{aligned} (1-0.30)x_1-0.50x_2&=Y_1 \\ -0.12x_1+(1-0.16)x_2&=Y_2 \end{aligned} \tag{2-31}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.59 \\ 0.23 \end{bmatrix}y_1+\begin{bmatrix} 0.95 \\ 1.33 \end{bmatrix}y_2 \tag{2-32}$$

思考题

1. 比较直接消耗系数与完全消耗系数的区别，推出它们的换算公式。
2. 试述投入产出模型的求解条件。
3. 解释矩阵 A、B 与列昂惕夫逆矩阵的经济意义。

第三章　固定资产投入产出模型

黑格尔说过:“理性何等强大,就何等狡猾。理性的狡猾总是在于它的间接活动,这种间接活动让对象按照它们本身的性质相互影响,互相作用,它自己并不直接参与这个过程,而只是实现自己的目的。”[1]能够在人与自然之间发挥作用与力量,借以实现人类目的的器物,就是劳动资料。人类的生产过程,是有劳动能力的人使用生产工具作用于劳动对象,实现人与自然之间物质变换的过程。

阿基米德说过:“给我一个支点和一根足够长的杠杆,我就可以撬动地球。”古代劳动者运用诸如杠杆、滑轮这般简易的劳动资料,曾经创造出古埃及金字塔、阿波罗神庙等建筑奇迹,至今还在震撼着人们的心灵。曾被阿基米德和其他哲人赋予神奇而无穷无尽力量的各种劳动资料,犹如“八阵图” 般简明而又变化无穷,其奥秘或力量源泉何在? 本章将对劳动资料,以及体现其价值形式的固定资产,它们的属性与构成等进行详细的探讨。

劳动力、生产工具和劳动对象构成生产过程的三要素。在投入产出表中,对于劳动对象与劳动力可分别通过产品表与劳动表予以反映,对于劳动资料即固定资产,虽然在产品表中有折旧、库存与更新等栏目描述,但依然不能反映固定资产再生产与更新,亦不能反映社会产品再生产与固定资产再生产之间的联系。因此,专门编制固定资产投入产出模型,详尽描述不同类型劳动资料即固定资产的更替与再生产,及其反映投入产出之间数量依存关系,具有重要的理论与现实意义。

一、劳动资料占用模型[2][3]

(一)劳动资料占用矩阵表

劳动资料是劳动者在生产过程中用以改变劳动对象的所有物质资料和物质条件。广义地说,劳动资料包括劳动过程中劳动者使用的生产工具,如手工工具或机器等,以及为保证生产正常进行所必需的生产设备或生产设施,如建筑物、运输工具等。

在表 3-1 中,主栏是对各个时期生产工具在结构上按生产功能进行的分类。序号 1,2,…,n 表示在结构上具有不同生产功能生产工具的分类序号。宾栏分为两部分,第一部分是各部门占用的生产工具,第二部分是占有的生产设备或生产设施。

表 3-1　劳动资料占用矩阵表

分配 分类	生产工具占用 1　2　…　n	小计	生产设施占用	合计
1	f_{11}　f_{12}　…　f_{1n}	f_{1n}	e_1	h_1

续表

分配 / 分类	生产工具占用 1 2 … n	小计	生产设施占用	合计
2	f_{21} f_{22} … f_{2n}	f_{2n}	e_2	h_2
⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
n	f_{n1} f_{n2} … f_{nn}	f_{nn}	e_n	h_n
合计	f_{n1} f_{n2} … f_{nn}	F	E	H

在生产工具占用象限中，宾栏数字 1，2，…，n 表示按生产功能进行分类的生产工具各生产部门序号。该象限构成一个棋盘式矩阵表，矩阵表中各元素 f_{ij}，表示各部门对不同类型生产工具的占用量。矩阵表中的每一行显示该行对应第 i 种生产工具在各生产部门分配的情况，而每一列则反映出第 j 个生产部门对各类功能生产工具的占用状况。可见，矩阵表中各元素 f_{ij} 均有两种含义，它既表示第 i 种生产工具分配给第 j 生产部门的数量，同时又表示第 j 生产部门对第 i 类生产工具的占用量。

在表 3 - 1 中，$F=\sum f_{ij}$ 表示国民经济各部门对第 i 种生产工具占用量的合计汇总；生产设施向量 e_j 表示国民经济各部门对第 j 种生产设施占用量；$H=F+E$ 表示所有国民经济部门对劳动资料的全部拥有量。

(二)劳动资料直接占用系数

为了探讨上述矩阵表中各部门间劳动资料占用的数量依存关系，在此需引入劳动资料占用系数这一概念。此系数是以矩阵表生产工具占用象限的元素 f_{ij} 为分子，以第 j 部门的年产出量 X_j 为分母，其表述式为：

$$a_{ij}^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}}{X_j}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)\tag{3-1}$$

式中，a_{ij}——第 j 部门对第 i 种生产工具的占用系数；

f_{ij}——第 j 部门对 i 种生产工具的占用量；

X_j——第 j 部门的年产出量(或产值，即 h_j)。

劳动资料占用系数 a_{ij} 的经济意义，是第 j 部门生产单位产值对第 i 种生产工具的占用量。如果加上相应的生产设施向量 e_j，实际上就构成了该部门对某种劳动资料或固定资产占用的定额指标。

按上述计算方法，生产工具占用象限各列元素均除以该列对应的部门产值，即得到这一部门对各自劳动资料的占用系数。如将上述矩阵按同一列元素加总，是第 j 部门对全部生产工具的占用系数，即该部门生产一个单位产值对生产工具的占用总量。

(1)第 j 部门劳动资料的占用系数，表示第 j 部门生产单位产品对生产工具的占用总量，即：

$$a_{0j}^{*}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_{ij}}{X_{j}}\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{3-2}$$

(2)各部门对第 i 种生产工具的占用系数是：

$$a_{i0}^{*}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{*}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3-3}$$

(3)各列计算完成后则构成一个矩阵，称为劳动资料占用系数矩阵，可表述如下：

$$A^{*}=\begin{bmatrix}a_{11}^{*} & a_{12}^{*} & \cdots & a_{1n}^{*}\\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} & \cdots & a_{2n}^{*}\\ a_{n1}^{*} & a_{n2}^{*} & \cdots & a_{nn}^{*}\end{bmatrix}\tag{3-4}$$

第 j 部门生产工具占用总系数 f_{0j}，有倒数存在，即：

$$1/f_{0j}=\frac{1}{f_{0j}/X_{j}}=\frac{X_{j}}{f_{0j}}\tag{3-5}$$

上述表达式显示，其倒数的分子是 j 部门的产值，分母是 j 部门占用的全部生产工具。在商品生产时代，由于 f_{ij} 是以价值形态表示的，因而可视为 j 部门占用的固定资产基金。由该表达式可知，其倒数的含义应是第 j 部门占用单位固定资产基金所得到的产出值或产值，即 j 部门的固定基金产出率。

例 3-1 设已知劳动资料占用矩阵表如表 3-2 所示，且知各部门的产值为：$X_1=100$，$X_2=300$，$X_3=200$。

表 3-2 劳动资料占用矩阵表 **单位:亿元**

	生产工具占用				生产设施	合计
	动力机构	传动机构	工作机构	小计		
1. 动力机构	10	30	15	55	5	60
2. 传动机构	15	50	20	85	15	100
3. 工作机构	5	20	10	35	10	45
合计	30	100	45	175	30	205

利用表 3-2 的数据，则有：①劳动资料直接占用系数矩阵为：

$$A^{*}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.075\\ 0.15 & 0.167 & 0.1\\ 0.05 & 0.067 & 0.05\end{bmatrix}$$

②各部门劳动资料占用总系数为：

$$a_{01}^{*}=\sum_{i=1}^{3}f_{i1}/X_{1}=\frac{30}{100}=0.3$$

$$a_{02}^{*}=\sum_{i=1}^{3}f_{i2}/X_{2}=\frac{100}{300}=0.333$$

$$a_{03}^{*}=\sum_{i=1}^{3}f_{i3}/X_{3}=\frac{45}{200}=0.225$$

③各部门对第 i 种劳动资料占用总系数为：

$$a_{10}^{*}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}^{*}=0.275$$

$$a_{20}^{*}=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}^{*}=0.417$$

$$a_{30}^{*}=\sum_{j=1}^{3}a_{3j}^{*}=0.167$$

④各部门固定基金产出率为：

$$1/a_{01}^{*}=X_{1}/\sum_{i=1}^{3}f_{i1}=\frac{100}{30}=3.333$$

$$1/a_{02}^{*}=X_{2}/\sum_{i=1}^{3}f_{i2}=\frac{300}{100}=3.0$$

$$1/a_{03}^{*}=X_{3}/\sum_{i=1}^{3}f_{i3}=\frac{200}{45}=4.444$$

与此相对应的是，劳动资料占用系数矩阵的同一行亦可相加。其和可解释为各部门生产单位产值时对第 i 种劳动资料的占用量。

（三）劳动资料完全占用系数

与产品之间相互间接消耗的情形相类似，劳动资料之间的间接占用亦是多层次的。它既包括对劳动资料的直接占用，又包含对劳动资料的全部间接占用。这是因为，各部门生产不仅需要直接占用劳动资料，并且生产过程中消耗的中间产品，也均包含有曾经占用的劳动资料耗费。劳动资料完全占用系数表示第 j 部门生产单位最终产品对第 i 种劳动资料的直接占用与全部间接占用量之和，可表示为：

$$b^{*}=a_{ij}^{*}+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{*}b_{ij} \tag{3-6}$$

式中，a_{ij}^{*}——第 j 部门对第 i 种生产工具的直接占用系数；

b_{ij}——第 j 部门对第 i 部门产品的完全消耗系数。

上式亦可用矩阵形式表示，于是有生产工具完全占用系数矩阵 B^{*} 为：

$$B^{*}=A^{*}(B+I) \tag{3-7}$$

$$B^{*}=A^{*}(I-A)^{-1} \tag{3-8}$$

显而易见，可运用 B^{*} 求出第 j 部门生产单位最终产品对各种生产工具的完全占用量，即第 j 部门生产工具完全占用总系数 b_{0j}^{*} 为：

$$b_{0j}^{*} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{*} \tag{3-9}$$

各部门对第 i 种生产工具的完全占用总系数 b_{i0}^{*} 为：

$$b_{i0}^{*} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{*} \tag{3-10}$$

对表 3－2，其完全消耗系数矩阵为：

$$B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

可得生产工具完全占用系数矩阵为：

$$\begin{aligned} B^{*} &= A^{*}(B+I) \\ &= \begin{bmatrix} 0.1375 & 0.2050 & 0.1125 \\ 0.2067 & 0.3305 & 0.1584 \\ 0.0717 & 0.1305 & 0.0734 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

各部门生产工具完全占用总系数为：

$$b_{01}^{*} = \sum_{i=1}^{3} b_{i1}^{*} = 0.4159$$

$$b_{02}^{*} = \sum_{i=1}^{3} b_{i2}^{*} = 0.666$$

$$b_{03}^{*} = \sum_{i=1}^{3} b_{i3}^{*} = 0.3443$$

全社会对各种生产工具的完全占用系数为：

$$b_{10}^{*} = \sum_{j=1}^{3} b_{1j}^{*} = 0.455$$

$$b_{20}^{*} = \sum_{j=1}^{3} b_{2j}^{*} = 0.6956$$

$$b_{30}^{*} = \sum_{j=1}^{3} b_{3j}^{*} = 0.2756$$

(四)劳动资料占用数学模型

在劳动资料占用矩阵表的基础上，可引入劳动资料占用系数，实现建立劳动资料占用数学模型。由此可以计算和安排计划期对劳动资料的需求量和增加量，进而可以模拟跟踪劳动资料对社会再生产的经济结构、有机构成等动态过程的进展程度。模型不仅可以以单项核算方式对各部门进行核算，而且可以建立数学模型对所有部门进行核算。

这些模型的共同特点是：把基期年度的劳动资料占用系数作为标准定额系数，在已知计划期各部门产出量的前提下，计算各部门在计划期劳动资料的占用量或增加量。如果计划期与基期间隔时间过长，考虑到技术进步与技术装备提高等因素，可先修订定额系数，然后

再利用模型计算。

劳动资料占用量的确定，通常包含两种情况，其一是计算计划期内某一部门对所有劳动资料的占用量，其二是计算国民经济各部门对某一种劳动资料的占用量。

1. 计划期各部门对劳动资料占用量的确定

(1)在生产技术水平不发生变化的情况下，第 j 部门在计划期第 t 年度对各类生产工具需要量的总和是：

$$\begin{aligned}\hat{f}_{0j}(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{*}\hat{X}_j(t) \\ &= a_{0j}^{*}\hat{X}_j(t) \qquad (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{3-11}$$

式中，$\hat{X}_j(t)$为第 j 部门在第 t 年度的计划产量。将上式写成矩阵形，即

$$(\hat{f}_{0j}(t))_{n\times 1} = A_d^{*}\ (\hat{X}_j(t))_{n\times 1} \tag{3-12}$$

式中，

$$(\hat{f}_{0j}(t))_{n\times 1} = [\hat{f}_{01}(t),\hat{f}_{02}(t),\cdots,\hat{f}_{0n}(t)]^T$$

为计划期第 t 年度各部门对各类劳动资料需要的列向量；

$$A_d^{*} = diag(a_{01}^{*},\quad a_{02}^{*},\quad \cdots,\quad a_{0n}^{*})$$

$$(\hat{X}_j(t))_{n\times 1} = (X_1(t),\quad X_2(t),\quad \cdots,\quad X_n(t)^T$$

(2)第 $t+1$ 年度第 j 部门所需新增劳动资料的数量为：

$$\begin{aligned}\Delta\hat{f}_{0j}(t+1) &= \hat{f}_{0j}(t+1) - \hat{f}_{0j}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{*}\Delta\hat{X}_j(t+1) \\ &= a_{0j}^{*}\Delta\hat{X}_j(t+1)\end{aligned} \tag{3-13}$$

其矩阵形式是：

$$(\hat{f}_{0j}(t+1))_{n\times 1} = A_d^{*}\ (\Delta\hat{X}_j(t+1))_{n\times 1} \tag{3-14}$$

式中，$(\hat{f}_{0j}(t+1))_{n\times 1} = (\hat{f}_{01}(t+1),\quad \hat{f}_{02}(t+1),\quad \cdots,\quad \hat{f}_{0n}(t+1))^T$

$$(\Delta\hat{X}_j(t+1))_{n\times 1} = (\Delta\hat{X}_1(t+1),\quad \Delta\hat{X}_2(t+1),\quad \cdots,\quad \Delta\hat{X}_n(t+1))^T$$

2. 计划期各部门对某种劳动资料占用量的确定

.(1)设第 $t+1$ 年度各部门对第 i 种劳动资料的需求总量为：

$$\begin{aligned}\hat{f}_i(t+1) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*}\hat{X}_j(t+1) + \hat{e}_i(t+1) \\ &= \hat{f}_{i0}(t+1) + \hat{e}_i(t+1) \quad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{3-15}$$

式中，$\hat{f}_{i0}(t+1)$、$\hat{e}_i(t+1)$分别为第 $t+1$ 年生产工具占用量与生产设施占用量。

(3－15)式的矩阵形式可写为：

$$(\hat{f}_i(t+1))_{n\times 1} = A^{*}\hat{X}_j(t+1) + (\hat{e}_i(t+1))_{n\times 1} \tag{3-16}$$

即：

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1(t+1) \\ \hat{f}_2(t+1) \\ \vdots \\ \hat{f}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1(t+1) \\ \hat{X}_2(t+1) \\ \vdots \\ \hat{X}_n(t+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{e}_1(t+1) \\ \hat{e}_2(t+1) \\ \vdots \\ \hat{e}_n(t+1) \end{bmatrix}$$

式中，

$[(\hat{f}_i(t+1)]_{n\times 1}=[(\hat{f}_1(t+1),(\hat{f}_2(t+1),\cdots,(\hat{f}_n(t+1)]^T$

$[e_i(t+1)]_{n\times 1}=[\hat{e}_1(t+1),\hat{e}_2(t+1),\cdots,\hat{e}_n(t+1)]^T$

(2)计划期第 $t+1$ 年度各部门对第 i 种劳动资料新增的需求总量是：

$$\begin{aligned} \Delta\hat{f}_i(t+1) &= \hat{f}_i(t+1)-\hat{f}_i(t) \\ &= [\hat{f}_{i0}(t+1)-\hat{f}_{i0}(t)]+[\hat{e}_i(t+1)-\hat{e}_i(t)] \\ &= \Delta\hat{f}_{i0}(t+1)+\Delta\hat{e}_i(t+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^*\Delta\hat{X}_j(t+1)+\Delta\hat{e}_i(t+1) \end{aligned} \tag{3-17}$$

其中，生产工具的增加量为：

$$\Delta\hat{f}_{i0}(t+1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^*\Delta\hat{X}_j(t+1) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

式 3－17 的矩阵形式是：

$$(\Delta\hat{f}_i(t+1))_{n\times 1} = A^*\Delta\hat{X}_j(t+1)+(\Delta\hat{e}_i(t+1))_{n\times 1}$$

式中，$[\Delta\hat{f}_i(t+1)]_{n\times 1}=[\Delta\hat{f}_1(t+1),\ \Delta\hat{f}_2(t+1),\ \cdots,\ \Delta\hat{f}_n(t+1)]^T$

$[\Delta\hat{e}_i(t+1)]_{n\times 1}=[\Delta\hat{e}_1(t+1),\ \Delta\hat{e}_2(t+1),\ \cdots,\ \Delta\hat{e}_n(t+1)]^T$

从社会流通与交换的角度看，在商品生产各部门间劳动资料的占用或分配，是以价值形式或等价交换的方式实现的。因此，在下一节将重点考察劳动资料的价值形式，即固定资产投资模型。

二、固定资产投资模型[2][3]

如果将各年度分期投资与连续不断的生产过程统一起来看，固定资产占用既可包括本期固定资产的使用，亦可包含对下一期新增加固定资产的投入。为探讨社会再生产过程中固定资产在各部门间的结构与数量联系，需要研究固定资产投资模型。

(一)固定资产投资矩阵表

固定资产投资是劳动资料建造形成规模与结构在价值上的体现。从社会再生产的角度看，固定资产投资、建造、投入使用与折旧，在各部门间存在着错综复杂的结构变动与数量联系。因此从一个确定的年度作为基期出发，不仅要考察本年度实现的固定资产投资，而且要

探讨其后逐年准备追加的投资，并在总量与结构变动上加以考量。为此，需建立一个反映部门间固定资产的生产消耗与投资积累的棋盘式矩阵表(见表 3－3)。

表 3－3　固定资产投资矩阵表

分配 分类	生产工具投资 1　2　…　n	小计	生产设施投资	合计
1	k_{11}　k_{12}　…　k_{1n}	k_{10}	k_{1f}	k_1
2	k_{21}　k_{22}　…　k_{2n}	k_{20}	k_{2f}	k_2
⋮	⋮　⋮　　⋮	⋮	⋮	⋮
n	k_{n1}　k_{n2}　…　k_{nn}	K_{n0}	k_{nf}	k_n
合计	K_{01}　k_{02}　…　K_{0n}	K_{00}	k_{0f}	k

在表(3－3)主栏中，是表述固定资产投资要素的分类，宾栏是固定资产投资部门的分类，进而分为生产工具投资部门和生产设施投资部门。其中生产工具投资是指物质部门为生产各类生产工具或机器设备所需的投资；生产设施投资是指用于各项生产设施所进行的投资，如厂房、仓库、公路和桥梁等。矩阵的行代表有 i 种投资要素在各物质生产部门的分配。矩阵的列表示对应列序号的第 j 部门进行投资所需使用的各种投资要素。可见，矩阵各元素 k_{ij} 有两种含义，它既表示第 i 种投资要素分配给第 j 部门的数量，也表示第 j 部门对第 i 种投资要素的需求量。

表中，$k_{i0}=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}$ 表示第 i 种投资要素分配给各部门生产工具的投资总量；

$k_{0j}=\sum_{i=1}^{n}k_{ij}$ 表示第 j 部门用于生产工具的投资总量；

$k_i=k_{i0}+k_{if}$ 表示第 i 种投资要素的总量；

$k_{00}=\sum_{i=1}^{n}k_i=k_{00}+k_{0f}$ 表示该年度全社会固定资产投资总额。

需要注意的是，上述讨论是基于以下假定，即将固定资产生产部门的产值等同于投资完成额，并且投资总量全部形成固定资产。此外，固定资产从投资建造到投产使用的“时滞”因素，也没有加以考虑。

(二)固定资产投资系数

运用固定资产投资矩阵表 3－3 可计算固定资产投资系数，以探讨各部门用于固定资产投资与产出之间的依存关系与数量联系。

1. 固定资产直接投资系数

$$q_{ij}=k_{ij}/\Delta X_j \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{3－18}$$

式中，q_{ij}——第 i 种固定资产对第 j 部门的直接投资系数；

ΔX_j——第 j 部门的产出增加量。

由式(3－18)可知，固定资产直接投资系数 q_{ij} 是指第 j 部门为增加一个单位产出量所需第 i 种固定资产的投资量。从 i、j 取值范围可知，各部门对各个类别固定资产的投资系数共

有 n^2 个，构成一个 n 阶方阵，即固定资产直接投资系数矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

汇总系数矩阵各列元素合计为 $q_{0j}=\sum_{i=1}^{n}q_{ij}$，表示第 j 部门每增加一个单位产值所需各种固定资产投资量之和。

汇总系数矩阵各行元素合计为 $q_{i0}=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}$，表示国民经济各部门平均增加一个单位产值所需对第 i 种固定资产的投资量。

$1/q_{0j}=\Delta X_j/k_{0j}$，表示第 j 部门单位投资量所得到的产出增加量，亦称为投资效果系数，反映固定资产投资对产出量增加的影响程度，即所取得的投资效益。

2. 固定资产完全投资系数

社会再生产的扩大，无论作为生产能力的提高，还是作为产品产量的增加，既需要增加直接用于生产该种产品的固定资产，又需要增加中间产品的消耗，从而间接需要生产这些中间产品的固定资产相应增加投资。在此，需要引入固定资产完全投资系数。

设 j_{ij} 表示第 j 部门增加单位最终产品产值对第 i 种固定资产所需完全投资量，即包括直接需要与全部间接需要第 i 种固定资产投资要素的总和，则 j_{ij} 为第 i 种固定资产对第 j 部门的完全投资系数，则有

$$j_{ij}=q_{ij}+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}b_{ij} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{3-20}$$

式中，b_{ij} 为第 j 部门对第 i 部门产品的完全消耗系数。

亦可将(3-20)式用矩阵形式表述：

$$J=Q(B+I)=Q(I-A)^{-1} \tag{3-21}$$

式中，$j_{0j}=\sum_{i=1}^{n}j_{ij}$ 是汇总系数矩阵列元素的合计，表示第 j 部门生产单位最终产品产值所需固定资产的完全投资量；$j_{i0}=\sum_{j=1}^{n}j_{ij}$ 是汇总系数矩阵行元素的合计，表示国民经济各部门均生产一个单位产值的最终产品，所需要第 i 种固定资产的完全投资量。

例 3-2 已知表 3—4 及各部门新增产值为：$\Delta X_1=200$，$\Delta X_2=500$，$\Delta X_3=400$ 。

表 3-4 劳动资料占用矩阵表 **单位：亿元**

	生产工具投资				生产设施投资	合计
	动力机构	传动机构	工作机构	小计		
1. 动力机构	5	10	5	20	10	30
2. 传动机构	10	20	5	35	15	50
3. 工作机构	5	15	10	30	5	35
合计	20	45	20	85	30	115

则相应的固定资产投资系数矩阵为：

$$Q=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & q_{13}\\ q_{21} & q_{22} & q_{23}\\ q_{31} & q_{32} & q_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.025 & 0.02 & 0.0125\\ 0.05 & 0.04 & 0.0125\\ 0.025 & 0.03 & 0.025\end{bmatrix}$$

各部门固定资产投资系数为

$$q_{01}=\sum_{i=1}^{3}q_{i1}=0.025+0.05+0.025=0.1$$

$$q_{02}=\sum_{i=1}^{3}q_{i2}=0.02+0.04+0.03=0.09$$

$$q_{03}=\sum_{i=1}^{3}q_{i3}=0.0125+0.0125+0.025=0.05$$

各类生产工具投资系数为：

$$q_{10}=\sum_{j=1}^{3}q_{1j}=0.025+0.02+0.0125=0.0575$$

$$q_{20}=\sum_{j=1}^{3}q_{2j}=0.05+0.04+0.0125=0.1025$$

$$q_{30}=\sum_{j=1}^{3}q_{3j}=0.025+0.03+0.025=0.08$$

设已知完全消耗系数矩阵为：

$$B=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.2\\ 0.4 & 0.5 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

则固定资产完全投资系数矩阵为：

$$J=Q(B+I)=\begin{bmatrix}0.025 & 0.02 & 0.0125\\ 0.05 & 0.04 & 0.0125\\ 0.025 & 0.03 & 0.025\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.3 & 0.2 & 0.2\\ 0.4 & 1.5 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 1.4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.0443 & 0.04 & 0.0265\\ 0.0848 & 0.075 & 0.0355\\ 0.052 & 0.06 & 0.046\end{bmatrix}$$

各部门生产单位产值的最终产品所需全部固定资产投资数量为：

$$j_{01}=\sum_{i=1}^{3}j_{i1}=0.1811$$

$$j_{02}=\sum_{i=1}^{3}j_{i2}=0.1750$$

$$j_{03}=\sum_{i=1}^{3}j_{i3}=0.1080$$

各部门生产单位产值的最终产品所需各种固定资产的完全投资量为：

$$j_{10} = \sum_{j=1}^{3} j_{1j} = 0.1108$$

$$j_{20} = \sum_{j=1}^{3} j_{2j} = 0.1953$$

$$j_{30} = \sum_{j=1}^{3} j_{3j} = 0.1580$$

需要的是，上述投资系数也是以若干假设为前提的。其一，上述讨论的固定资产投资系数，是将各部门产量的增加归结为固定资产投资的结果。事实上，产品产量的增加，也可能是劳动生产率的提高或管理水平的完善、劳动时间的延长或劳动力投入的增加，新技术、新工艺的采用等因素所导致。其二，在实际生产过程中，固定资产从投资建造到投产运行和产品产量增加，存在着一定的间隔时间，即“时滞期”。这里讨论的固定资产投资系数都省略了时滞问题，而是假定本年的固定资产投资在当年就投产运行，实现产品产量增加。其三，从新增生产能力，到实现产品产量的增加，通常还受到诸多其他因素的限制与影响。如原材料供应不足、产品销路不畅、仓储运输能力有限等，都可能使新增生产能力不能发挥效用，从而实现产品产量的增加。

(二)固定资产投资数学模型

由固定资产投资系数的定义式可推出：

$$k_{ij} = q_{ij}\Delta X_j \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-22}$$

将式(3－22)用矩阵形式表示为：

$$K = Q \cdot (\Delta X)_d \tag{3-23}$$

式中：$(\Delta X)_d = diag(\Delta X_1, \Delta X_2, \cdots, \Delta X_n)$为部门产出增加量对角矩阵；$Q$为固定资产直接投资系数矩阵；$K$为生产工具投资矩阵。

(3－23)式是基本的固定资产投资模型，利用它可完成以下计算：

1.确定计划期第$t+1$年度第j部门生产工具投资量：

(1)从社会总产品增加量进行计算，其单项核算式为：

$$\begin{aligned}\hat{k}_{0j}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\Delta\hat{X}_j(t+1) \\ &= q_{0j}\Delta\hat{X}_j(t+1) \quad (j = 1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{3-24}$$

式中，q_{ij}为第$t+1$年度第j部门的固定资产投资系数；$\Delta\hat{X}_j(t+1)$为第$t+1$年度第j部门总产品的计划增加量。将(3－24)式用矩阵形式表示，即

$$\hat{K}_{(j)}(t+1) = Q_{(j)d} \cdot \Delta\hat{X}_{(j)}(t+1) \tag{3-25}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{01}(t+1) \\ \hat{k}_{02}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{k}_{0n}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{01} & & & \\ & q_{02} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{X}_1(t+1) \\ \Delta\hat{X}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{X}_n(t+1) \end{bmatrix}$$

由(3－25)式，可得

$$\Delta\hat{X}_{(j)}(t+1) = Q_{(j)d}^{-1} \cdot \hat{K}_{(j)}(t+1) \tag{3-26}$$

即

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{X}_1(t+1) \\ \Delta\hat{X}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{X}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/q_{01} & & & \\ & 1/q_{02} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/q_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{01}(t+1) \\ \hat{k}_{02}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{k}_{0n}(t+1) \end{bmatrix}$$

式中，$Q_{(j)d}^{-1}$是以矩阵形式表示的部门投资效果系数。

上式表明，第 j 部门总产品产出增加量，等于部门固定资产投资效果系数乘以该部门生产工具投资量。

(2)从最终产品产出增加量的角度进行计算

设计划期第 $t+1$ 年度第 j 部门最终产品产出增加量$\Delta\hat{y}_j(t+1)$为

$$\begin{aligned} \hat{\hat{K}}_{0j}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n} j_{ij} \cdot \Delta\hat{y}_j(t+1) \\ &= j_{0j} \cdot \Delta\hat{y}_j(t+1) \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{3-27}$$

式中，j_{0j}为第 t 年度第 j 部门固定资产完全投资系数。其矩阵形式为：

$$\hat{\hat{K}}_j(t+1) = J_{(j)d} \cdot \Delta\hat{Y}_j(t+1) \tag{3-28}$$

即

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{K}}_{01}(t+1) \\ \hat{\hat{K}}_{02}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{\hat{K}}_{0n}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{01} & & & \\ & j_{02} & & \\ & & \ddots & \\ & & & j_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{y}_1(t+1) \\ \Delta\hat{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{y}_n(t+1) \end{bmatrix}$$

由(3－28)式亦可推出

$$\Delta\hat{Y}_j(t+1) = \hat{\hat{K}}_j(t+1) \cdot 1/J_{(j)d}$$

它反映最终产品产出增加量与投资量之间的数量关系。$1/J_{(j)d}$是以最终产品产出率表示的投资效果系数，即单位固定资产投资所能取得的最终产品产出增加量。其矩阵形式为

$$\Delta\hat{Y}(t+1) = J_{(j)d}^{-1} \cdot \hat{K}_j(t+1) \tag{3-29}$$

即

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{y}_1(t+1) \\ \Delta\hat{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{y}_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/j_{01} & & & \\ & 1/j_{02} & & \\ & & \vdots & \\ & & & 1/j_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{01}(t+1) \\ \hat{k}_{02}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{k}_{0n}(t+1) \end{bmatrix}$$

在此,$J_{(j)d}^{-1}$是以矩阵形式表示的投资效果系数,反映最终产品的产出率。

2. 计划期第 $t+1$ 年度社会各部门对第 i 种固定资产完全需要量的确定

(1)从社会总产品增加量的角度计算

设第 $t+1$ 年度各部门对第 i 种固定资产的投资量 $\hat{k}_{i0}(t+1)$ 为:

$$\hat{k}_{i0}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\Delta\hat{X}_j(t+1) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3-30}$$

其矩阵形式为:

$$\hat{K}_i(t+1) = Q \cdot \Delta X\hat{X}_j(t+1) \tag{3-31}$$

即

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{10}(t+1) \\ \hat{k}_{20}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{k}_{n0}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{X}_1(t+1) \\ \Delta\hat{X}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{X}_n(t+1) \end{bmatrix}$$

将(3-28)式两边左乘 Q^{-1},则有

$$\Delta\hat{X}_j(t+1) = Q^{-1} \cdot \hat{K}_i(t+1) \tag{3-32}$$

如果考虑生产设施的投资在内,则有

$$\hat{k}_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\Delta\hat{X}_j(t+1) + \hat{k}_{if} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为:

$$\hat{K} = Q \cdot \Delta\hat{X} + \hat{K}_f \tag{3-33}$$

(2)从最终产品增加量的角度计算

如果仅考虑生产工具的投资,对于完全投资系数,则有

$$\hat{\hat{K}}_{i0}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} j_{ij} \cdot \Delta\hat{y}_j(t+1) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为:

$$\hat{\hat{K}}_i(t+1) = J \cdot \Delta\hat{Y}_j(t+1) \tag{3-34}$$

即

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{k}}_{10}(t+1) \\ \hat{\hat{k}}_{20}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{\hat{k}}_{n0}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & \cdots & j_{1n} \\ j_{21} & j_{22} & \cdots & j_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_{n1} & j_{n2} & \cdots & j_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{y}_1(t+1) \\ \Delta\hat{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{y}_n(t+1) \end{bmatrix}$$

用 J^{-1} 两边左乘(3-34)式，得

$$\Delta\hat{Y}_j(t+1) = J^{-1} \cdot \hat{\hat{K}}_i(t+1) \tag{3-35}$$

在此，J^{-1} 是以最终产出率形式表示的投资效果系数矩阵。

3. 社会总投资量的确定[2][3]

生产工具投资总量为：

$$\hat{k}_{00}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} \hat{k}_{0j}(t+1) = \sum_{i=1}^{n} \hat{k}_{i0}(t+1) \tag{3-36}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{aligned} \hat{k}_{00}(t+1) &= Q_j \cdot \Delta\hat{X}(t+1) \\ &= (q_{01}, \quad q_{02}, \quad \cdots, \quad q_{0n}) \begin{bmatrix} \Delta\hat{X}_1(t+1) \\ \Delta\hat{X}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{X}_n(t+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-37}$$

用完全系数形式表示为：

$$\begin{aligned} \hat{\hat{K}}_{00}(t+1) &= J_{(j)} \cdot \Delta\hat{Y}(t+1) \\ &= (j_{01}, \quad j_{02}, \quad \cdots, \quad j_{0n}) \begin{bmatrix} \Delta\hat{y}_1(t+1) \\ \Delta\hat{y}_2(t+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{y}_n(t+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-38}$$

生产工具投资总量加上生产设施投资总量，即全社会总投资量：

$$\begin{aligned} \hat{k}(t+1) &= \hat{k}_{00}(t+1) + \hat{k}_{0f}(t+1) \\ &= Q_{(j)} \cdot \Delta\hat{X}(t+1) + \hat{k}_{0f}(t+1) \end{aligned}$$

思考题

1. 如何运用固定资产占用模型和固定资产投资模型编制经济计划？
2. 如何将固定资产占用和固定资产投资统一到固定资产投入产出模型？

第四章　线性动态投入产出模型

众所周知，静态投入产出模型是探讨某一时点的最终产品向量 Y 和总产品向量 X，因此，无法反映社会再生产过程随时间发展在不同时点之间的联系。实际上，第 t 年的生产过程是在 $t-1$ 年基础上进行的。每一时期在生产过程中所消耗的产品，需要重新得到新的补给。而形成资产的产品，则除了每一时期作为折旧已经损耗的部分以外，只要尚未报废，就一直作为资本存量而延续使用于下一期的生产活动，继续构成各部门生产活动的基础。

一、连续型线性动态投入产出模型

为了反映再生产过程在不同时点之间的联系，必须对最终产品进行分类，并研究各类最终产品与以后时期的再生产过程之间的联系。最终产品可以分为两大类，即最终净产品和生产性投资产品。最终净产品包括居民个人消费品、社会集体消费品、增加非生产性固定资产、增加国家储备、净出口。

生产性投资产品包括两大类：(1)追加生产性的固定资产。生产性的固定资产主要包括两个部分：其一是生产设施，即建筑业产品，如厂房等；其二是生产工具，主要是机械类产品，如机床等。(2)追加生产性的流动资产。如各种原材料，辅助材料和燃料等。记录不同部门购买何种产品作为其投资品使用的矩阵，即投资矩阵或资本矩阵 Q，它是常见投入产出表中资产形成项目向量分割为 n 个产业向量而得到的。

(一)时滞因素

时滞，是指从投入到产出之间在时间上滞后的间隔和差距。在固定资产形成过程中，从投入到形成新的生产能力，直到产品产量增加之间的时间间隔，通常称之为投资时滞。固定资产投资时滞的确定是复杂而困难的。但就具体建设项目而言，计算时滞通常是以形成生产能力的时间为准。就部门而言，投资时滞一般考虑的是同类建设项目的综合平均值。

在理论上，为了研究的方便，我们假设所有投资产品的时滞均为一年，即第 t 年的投资活动能够使第 $t+1$ 年的部门产量增加。

(二)连续型动态投入产出模型

建立连续型动态投入产出模型时，先利用基础式

$$X_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j(t)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\Delta x_j(t+1)=\widetilde{y}_i(t) \tag{4-1}$$

由于采用连续型计时方式 $X_j(t)$是时间 t 的连续函数，此时函数 $X_j(t)$的增量为：

$$\Delta X_j(t)=X_j(t+\Delta t)-X_j(t)$$

当 $\Delta t\to 0$，$\Delta X_j(t)/\Delta t$ 的极限存在，则有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X_j(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X_j(t+\Delta t) - X_j(t)}{\Delta t} = \frac{dX_j(t)}{dt}$$

上式表明生产量在时间发生微小改变时的增量，可以通过求导形式表示。由此，下年度各部门对本年度投资产品的需要量为：

$$\begin{aligned} k_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \Delta x_j(t+1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

将上式代入(4－1)式，得

$$X_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t) - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \dot{X}_j(t) = \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-2}$$

亦可将上式写为矩阵形式：

$$X(t) - AX(t) - Q\dot{X}(t) = \tilde{Y}(t) \tag{4-3}$$

式中，$\dot{X}(t)$为社会总产品列向量对时间 t 的一阶导数。Q 为资本系数矩阵或投资系数矩阵，均为 n 维列向量。

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad \tilde{Y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{X}_n(t) \end{bmatrix}$$

(4－2)式或(4－3)式即连续型动态投入产出模型的一般形式，是一个一阶线性常微分方程组，也称为微分方程组形式的动态投入产出模型，是由列昂惕夫提出的。

在(4－3)式中，A 和 Q 是常系数矩阵，构成这个模型的结构系数矩阵。X 是内生变量，可通过对此方程进行求解来确定。最终需求中的资本形成投资这一概念，其理论含义不同于消费及出口等其他项目，意味着投资的内生化。如果假定资产存量与产出有比例关系，而投资的结果是资产存量的增加，则投资与产出增加之间有比例关系，也就是资本增量与产出增量的比例关系，即投资系数。有了投资矩阵，则可获得投资矩阵的要素与各产业的产出增量变化的比例，也就是投资系数矩阵 Q。由于投资的结果是导致下一期投资结构的变动和资产存量的增加，从而形成后期产出的相应增长，因而是联结不同时点间变化的枢纽。投资的内生化意味着投入产出模型中包含的时间因素，因而也就意味着投入产出分析的动态化。$\tilde{Y}$ 是外生变量，可视为由这个模型以外的因素决定。

在上述模型中，直接消耗系数 A 和投资系数 Q 被假设是固定不变的，唯有各部门产量 $X_i(t)$和最终净产品 $\tilde{Y}$ 是时间 t 的函数。因此，这个模型具有浓厚的假定性。其不足之处是，由于该模型采用连续性计时法，其着眼点是分析经济变量在动态过程中任一时刻的瞬时变化的，这在理论上可堪称尽善尽美，但在现实经济过程中却是无法计量这种变化，因而在实践中难以付诸实施。

(三)动态投入产出模型参数的经济解释

为了便于计算,可将(4-3)式写成简明的矩阵形式,并整理,有:

$$(I-A)X-Q\dot{X}=\widetilde{Y} \tag{4-4}$$

(4-4)式是一个非齐次线性一阶常微分方程组。它的通解等于齐次微分方程组

$$(I-A)X-Q\dot{X}=0$$

的通解加上一个特解,这个特解取决于Y的函数表达式。

(1)如果各部门最终净产品在各个年度的数值相等,即

$$\widetilde{Y}_i(t)=g_{i0} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则特解为常数,即

$$X_i(t)=W_{i0} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2)如果各部门最终净产品可表示为时间t的多项式,即

$$\widetilde{Y}_i(t)=g_{i0}+g_{i1}t+g_{i2}t^2+\cdots+W_{iv}t^v \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则特解的形式为

$$\widetilde{Y}_i(t)=W_{i0}+W_{i1}t+W_{i2}t^2+\cdots+W_{iv}t^v \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(3)如各部门的最终净产品可表示为时间的指数多项式,即

$$\widetilde{Y}_i(t)=g_{it}e^{u1t}+g_{i2}e^{u2t}+\cdots+W_{iv}e^{uvt} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则特解的形式为

$$X_i(t)=W_{i1}e^{u1t}+W_{i2}e^{u2t}+\cdots+W_{iv}e^{uvt} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其特征方程为

$$|I-A-\lambda B|=0$$

①从长期看,即t当足够大时,国民经济各部门的生产水平将近似的由最大特征根所在的项决定。即

$$X_i(t)=c_1k_{i1}e^{\lambda_1 t}+c_2k_{i2}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nk_{in}e^{\lambda_n t} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中,λ_1为最大特征根。

②从长期看,各部门的增长速度,主要由最大特征根决定。具体地说,第i部门的增长速度可表述为

$$\frac{X_i(t+1)-X_i(t)}{X_i(t)}=\frac{\Delta X_i(t)}{X_i(t)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

而

$$\Delta X_i(t)\approx\frac{dX_i(t)}{dt}\Delta t \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

当$\Delta t=1$时

$$\Delta X_i(t)\approx\frac{dX_i(t)}{dt}=\dot{X}_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因而有

$$\frac{\Delta X_i(t)}{X_i(t)}=\frac{\dot{X}_i(t)}{X_i(t)}\approx\frac{c_1k_{i1}e^{\lambda_1 t}\cdot\lambda_1}{c_1k_{i1}e^{\lambda_1 t}}=\lambda_1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

这就是说,从长期看,所有部门的增长速度都是由最大特征根λ_1决定。

③从长期看，各部门之间的比例，主要由最大特征根所在项的系数比例所决定，即

$$\frac{X_i(t)}{X_j(t)} \approx \frac{c_1 k_{i1} e^{\lambda_1 t}}{c_1 k_{j1} e^{\lambda_1 t}} = \frac{k_{i1}(t)}{k_{j1}(t)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

二、离散型动态投入产出模型

为了克服连续型动态投入产出模型的局限性，使模型具有实用价值，列昂惕夫在 1965 年提出了离散型动态投入产出模型[4]，模型用差分方程来表示：

$$X_i(t) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j(t) - \sum_{i=1}^{n} q_{ij}[X_j(t+1) - X_j(t)] = \tilde{y}_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为：

$$X(t) - AX(t) - Q[X(t+1) - X(t)] = \tilde{Y}(t) \tag{4-5}$$

或改写成

$$X_{t+1} = Q^{-1}(I-A+Q)X_t - Q^{-1}\tilde{Y}_t \tag{4-6}$$

在(4－6)式中，假设 Q 逆矩阵存在，则 $Q^{-1}(I-A+Q)$ 为常系数矩阵，$Q^{-1}\tilde{Y}_t$ 为常数列向量，X_t 与 X_{t+1} 是两个不同时段的部门产值产量。显而易见，该式为一阶常系数差分方程组的一般表达式。

上述模型有两个假定：(1)直接消耗系数 A 与投资系数 Q 在所指定的时间区间内固定不变；(2)投资的提前期假设为一年。即第 $t+1$ 年增加的产量，所需要的投资用品应在第 t 年投入。

(一)不变系数矩阵的动态逆

为了克服上述的局限性，列昂惕夫在 1968 年提出了动态逆概念，现作一个简要的介绍。在各年度直接消耗系数矩阵 A 和资本结构矩阵 B 不变的情况下，由(4－5)式整理后有：

$$(I-A+Q)X(t) = QX(t+1) + \tilde{Y}(t) \tag{4-7}$$

设 $(I-A+Q)=G$ 得

$$GX(t) - QX(t+1) = \tilde{Y}(t) \tag{4-8}$$

但(4－8)式仅反映第 t 年社会产品的平衡关系，为了研究的需要，现将模型的考察期从 1 年扩展到 m 年，则各年度的平衡关系式分别是：

第一年：$GX(1)-QX(2)=\tilde{Y}(1)$

第二年：$GX(2)-QX(3)=\tilde{Y}(2)$

…　　　　…

第 $m-2$ 年：$GX(m-2)-QX(m-1)=\tilde{Y}(m-2)$

第 $m-1$ 年：$GX(m-1)-QX(m)=\tilde{Y}(m-1)$

第 m 年　$GX(m)=\tilde{Y}^*(m)$　　(4－9)

其中，在第 m 年度中，

$$\tilde{Y}^*(m) = QX(m+1) + \tilde{Y}(m) \tag{4-10}$$

现将从基年到 $m+1$ 年度进行统一考察，可以用分块矩阵形式把各年度的平衡关系式包

含进去。由于已假定在所指定的时间区间内不存在技术进步，直接消耗系数 A 与投资系数 Q 不发生变化，于是，(4-9)连锁平衡式可结合起来构成一个分块矩阵，其表达式为：

$$\begin{bmatrix} G-Q & & & & & \\ & G-Q & & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & G-Q & & \\ & & & & G-Q & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(m-2)} \\ X_{(m-1)} \\ X_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{Y}_{(1)} \\ \widetilde{Y}_{(2)} \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_{(m-2)} \\ \widetilde{Y}_{(m-1)} \\ \widetilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix} \qquad (4-11)$$

(4-11)式可简要地表示为：$UX=\widetilde{Y}$ (4-12)

在现实经济中，通常最终净产品 $\widetilde{Y}$ 可由计划给出，只要求解出 U 逆矩阵，就可以计算出社会总产品 X。现通过以下逐级递推方式来实现 U 逆矩阵的推导。

由(4-9)式，可得

$$X(m)=G^{-1}\widetilde{Y}^{*}(m)$$

为了研究的便利，设 $R=G^{-1}Q$，则有

$$\because X(m-1)=G^{-1}\widetilde{Y}(m-1)+G^{-1}QX(m)=G^{-1}\widetilde{Y}(m-1)+G^{-1}QG^{-1}\widetilde{Y}^{*}(m)$$

$$\therefore X(m-1)=G^{-1}\widetilde{Y}(m-1)+RG^{-1}\widetilde{Y}^{*}(m)$$

$$X(m-2)=G^{-1}\widetilde{Y}(m-2)+RG^{-1}\widetilde{Y}(m-1)+R^{2}G^{-1}\widetilde{Y}^{*}(m)$$

……

推而广之，由于已假定不存在技术进步，直接消耗系数 A 与投资系数 Q 亦不发生变动，其最终一列的元素可按其变动规则而回溯到同一几何数列来描述：

$$G^{-1}\quad RG^{-1}\quad R^{2}G^{-1}\quad \cdots\quad R^{t}G^{-1}\quad \cdots\quad R^{m-1}G^{-1}\quad R^{m}G^{-1}$$

众所周知，当 R 的指数 t 充分大时，R 所对应元素的数值应逐渐地趋向于同一常数，等于 R 主特征根的实部。由于该特征根通常应是小于 1 的正实数，表示在最后一年向最终需求部门提交的追加产品，所需要应相追加的产出将变得越来越少，最终变为无穷小。

由此可写出 U 逆矩阵的分块矩阵，模型形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(m-2)} \\ X_{(m-1)} \\ X_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1} & RG^{-1} & R^{2}G^{-1} & \cdots & R^{m-1}G^{-1} & R^{m}G^{-1} \\ & G^{-1} & RG^{-1} & \cdots & R^{m-2}G^{-1} & R^{m-1}G^{-1} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & G^{-1} & RG^{-1} & R^{2}G^{-1} \\ & & & & G^{-1} & RG^{-1} \\ & & & & & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{Y}_{(1)} \\ \widetilde{Y}_{(2)} \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_{(m-2)} \\ \widetilde{Y}_{(m-1)} \\ \widetilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix} \qquad (4-13)$$

(4-13)式就是离散型动态投入产出模型的动态逆矩阵，是一个分块矩阵，共有 $m\times m$

个子块,每个子块都是 $n\times n$ 子矩阵。它表明,只要通过经济预测或由计划部门给出社会总产品的数量,在确定了最终净产品完全需要系数 G^{-1} 和投资系数矩阵 Q 后,就可便捷地计算出计划期内各年社会总产品的生产规模 $X(t)$。

理论上 Q 可逆,但实际中投资系数集中于机械、建筑等,而对于服务、能源等不作为资本品使用的内容为零,特别是对角要素,若为零则矩阵不可逆。因此,实际分析时需要适当结合部门分类以使矩阵可逆。由于模型规范严谨,便于上机运算求解,其已成为编制中长期计划的有效方法。

(二)变系数矩阵的动态逆

在前面的分析中,是以假定整个计划期内各年度系数 A、Q 不发生变动为前提,但事实上它们是随着经济发展或技术进步而在不断发生变化。此时,系数矩阵 A、Q 均不是固定不变的常数,而可表述为时间 t 的函数。因此,由(4－5)式表述的离散型动态投入产出模型,可表示如下:

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad Q(t)=\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & \cdots & q_{1n}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & \cdots & q_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1}(t) & q_{n2}(t) & \cdots & q_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

由此,离散型动态投入产出模型可表述为:

$$X(t)-A(t)X(t)-Q(t+1)X(t+1)+Q(t)X(t)=\tilde{Y}(t) \tag{4－14}$$

令:$G(t)=[I-A(t)+Q(t)]$

则(4－14)式简写为:

$$G(t)X(t)-Q(t+1)X(t+1)=\tilde{Y}(t) \tag{4－15}$$

如果计划期为 m 年,上式可展开为:

$G(1)X(1)-Q(2)X(2)=\tilde{Y}(1)$

$G(2)X(2)-Q(3)X(3)=\tilde{Y}(2)$

……

$G(m-2)X(m-2)-Q(m-1)X(m-1)=\tilde{Y}(m-2)$

$G(m-1)X(m-1)-Q(m)X(m)=\tilde{Y}(m-1)$

$G(m)X(m)=\tilde{Y}^{*}(m)$

其中,$\tilde{Y}^{*}(m)=Q(m+1)X(m+1)+\tilde{Y}(m)$

在此,上述方程组可用分块矩阵形式表示,即得到变系数模型如下:

$$\begin{bmatrix} G_{(1)} & -Q_{(2)} & & & & \\ & G_{(2)} & -Q_{(3)} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & G_{(m-2)} & -Q_{(m-1)} & \\ & & & & G_{(m-1)} & -Q_{(m)} \\ & & & & & G_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{(m-2)} \\ \tilde{Y}_{(m-1)} \\ \tilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{(1)} \\ \tilde{Y}_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{(m-2)} \\ \tilde{Y}_{(m-1)} \\ \tilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix} \tag{4-16}$$

在(4－16)式中，如果其矩阵是非奇异矩阵，则存在相对应的逆矩阵，于是有：

$$\begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{(m-2)} \\ \tilde{Y}_{(m-1)} \\ \tilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{(1)}^{-1} & R_{(1)}G_{(2)}^{-1} & \prod\limits_{t=1}^{2} R(t)G_{(3)}^{-1}\cdots & \prod\limits_{t=1}^{m-3} R(t)G_{(m-2)}^{-1} & \prod\limits_{t=1}^{m-2} R(t)G_{(m-1)}^{-1} & \prod\limits_{t=1}^{m-1} R(t)G_{(m)}^{-1} \\ & G_{(2)}^{-1} & R_{(2)}G_{(3)}^{(-1)}\cdots & \prod\limits_{t=2}^{m-3} R(t)G_{(m-2)}^{-1} & \prod\limits_{t=2}^{m-2} R(t)G_{(m-1)}^{-1} & \prod\limits_{t=2}^{m-1} R(t)G_{(m)}^{-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & G_{(m-2)}^{-1} & R_{(m-2)}G_{(m-1)}^{-1} & \prod\limits_{t=m-2}^{m-1} R(t)G_{(m)}^{-1} \\ & & & & G_{(m-1)}^{-1} & R_{(m-1)}G_{(m)}^{-1} \\ & & & & & G_{(m)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{(1)} \\ \tilde{Y}_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{(m-2)} \\ \tilde{Y}_{(m-1)} \\ \tilde{Y}^{*}_{(m)} \end{bmatrix}$$

式中，

$$X(t)-A(t)X(t)-Q(t+1)X(t+1)+Q(t)X(t)=\tilde{Y}(t) \tag{4-17}$$

思考题

构造动态投入产出模型时须考虑哪些因素？